

# 基于小波空间的图像分解变分模型

李 敏, 冯象初

(西安电子科技大学理学院, 陕西西安 710071)

摘 要: 本文从不同的角度考虑 OSV 模型, 提出一种基于全变差和  $H^{-1}$  范数的图像分解变分模型. 通过分析 OSV 模型的性质, 给出该模型基于小波空间的非线性偏微分方程和迭代算法. 同时, 从理论上分析了该模型的极小值存在性. 实验表明该方法具有可行性.

关键词: 全变差; 图像分解; 结构; 纹理; 偏微分方程; 极小化; 小波

中图分类号: TN911 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112(2008)01-0184-04

## A Variational Model for Image Decomposition Based on Wavelet Method

LI Min, FENG Xiang-chu

(School of Science, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: A variational model for image decomposition based on total variation and  $H^{-1}$  norm is proposed, whose start is different from the OSV model. By the properties of OSV model, the nonlinear partial differential equation and the associated iterative algorithm based on wavelet method are introduced. And the proof of the existence of minimizer for the variational model is given. Numerical results of image decomposition and denoising show that this model is feasible.

Key words: total variation; image decomposition; structure; texture; partial differential equation; minimization; wavelet

### 1 引言

图像分解是图像处理中新近涌出的一项重要的、具有挑战性的任务, 可以把它归结为数学上的反问题范畴. 通常认为一幅已知的图像  $f: \Omega \rightarrow R$  可以分解为两个组成部分  $u$  和  $v$  (即  $f = u + v$ ). 其中,  $u$  是  $f$  的结构表示, 包含了图像主要的几何特征信息;  $v$  是振荡部分, 包括纹理信息或噪声.

这项任务首次被 Meyer 从理论的角度进行阐明, 建立了基于  $ROF^{[1]}$  全变差极小化框架下的振荡函数建模理论<sup>[2]</sup>. 该理论认为有界变差函数空间 (简称 BV 空间) 对纹理图像不是理想的函数空间, 必须通过与 BV 空间在一定意义上的对偶空间来对纹理进行建模. 然而, 由于 Meyer 的这种理论模型没有标准的 Euler-Lagrange 方程, 因此在实际应用中很难直接求解. 2003 年, L. Vese 等首次提出了逼近 Meyer 理论模型的方法 (简称 VO 模型)<sup>[3]</sup>. 同时, Osher 等人继续拓展 VO 模型的观点, 建议了一种基于全变差极小化和  $H^{-1}$  范数的图像分解模型 (简称 OSV 模型)<sup>[4]</sup>:

$$\inf_{u \in BV} \left\{ F(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| + \lambda \int_{\Omega} |\nabla(\Delta^{-1}(f-u))|^2 \right\} \quad (1)$$

其中,  $\|(f-u)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla(\Delta^{-1})(f-u)|^2 dx$ . 其相应的 Euler-Lagrange 方程为实域中一个带有 Laplacian 算子的四阶非线性偏微分方程. 本文通过分析 OSV 模型所具有的特性<sup>[4]</sup>, 把它引入小波空间, 从不同的角度提出了一种新的图像分解算法.

### 2 新方法的描述

假设  $f = u + v$ , OSV 模型满足的条件为<sup>[4]</sup>:

$$f \in BV(\Omega) + \left\{ v \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} v(x) dx = 0 \right\} \quad (2)$$

此时, 用小波是不能直接刻画 BV 空间中的图像  $u$ . 因为全变差范数  $|u|_{BV} = \int_{\Omega} |\nabla u|$  在几何本质上是一个 Radon 测度<sup>[5]</sup>, 它的一阶变分会导致图像最重要的二阶 Euclidean 几何特征-曲率. 而经典小波作为尺度空间的刻画工具, 最初并不是由几何信息推动的, 因此它不能直接用来处理这些几何信息. 但是, 值得庆幸的是小波  $\phi$  具有在  $L^2(\Omega)$  空间中积分为零的性质 (即  $\int \phi(t) = 0$ ). 这正好与 OSV 模型所要求的  $v$  要满足均值为零的条件(2)相吻合. 所以, 我们可以考虑在  $L^2(\Omega)$  中先用小

波基  $\phi$  来求解  $v$ , 然后由  $f - v$  来获得  $u \in BV(\Omega)$ .

令  $u = f - v$ , 变分泛函(1)转化为

$$\inf_{v \in L^1(\Omega)} \left\{ E(v) = \int_{\Omega} |\nabla(f-v)| + \lambda \int_{\Omega} |\nabla(\Delta^{-1}v)|^2 dx \right\} \quad (3)$$

令  $E'(v) = 0$ , 其相应的 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{cases} 2\lambda\Delta^{-1}v = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla(f-v)}{|\nabla(f-v)|}\right) \\ \frac{\partial(f-v)}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ \frac{\partial \operatorname{div}\left(\frac{\partial(f-v)}{|\nabla(f-v)|}\right)}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

在等式(4)两边同乘以 Laplacian 算子  $\Delta$  有

$$\begin{cases} 2\lambda = \Delta\left[\operatorname{div}\left(\frac{\nabla(f-v)}{|\nabla(f-v)|}\right)\right] \\ \frac{\partial(f-v)}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ \frac{\partial \operatorname{div}\left(\frac{\partial(f-v)}{|\nabla(f-v)|}\right)}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

这时, 式(5)中的  $v$  仍满足均值为零的性质, 即

$$\int_{\Omega} v(x) dx = 0. \text{ 因此, } v \text{ 可以用小波基来展开.}$$

假设  $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^jx - k)$ ,  $j, k \in Z$  是  $L^2(\Omega)$  空间的一组正交小波基<sup>[6]</sup>, 把式(5)两边看成是尺度空间  $V_j \subset L^2(\Omega)$  中的采样, 用类似于小波 Galerkin 的方法<sup>[7]</sup>, 将等式两边投影在小波基  $\phi_{j,k}$  上有

$$(v, \phi_{j,k}) = \frac{1}{2\lambda} \left[ \Delta \left[ \operatorname{div} \left( \frac{\nabla(f-v)}{|\nabla(f-v)|} \right) \right] \right], \phi_{j,k} \quad (6)$$

记  $(v, \phi_{j,k}) = \beta(j, k)$ , 式(6)就转化为

$$\frac{1}{2\lambda} \left[ \operatorname{div} \left( \frac{\nabla(f-v)}{|\nabla(f-v)|} \right) \right], \phi_{j,k}(x) dx - \beta(j, k) = 0 \quad (7)$$

其相应的时间进化形式为

$$(\beta(j, k))_t = \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} \Delta \left[ \operatorname{div} \left( \frac{\nabla(f-v)}{|\nabla(f-v)|} \right) \right] \times \phi_{j,k}(x) dx - \beta(j, k) \quad (8)$$

### 3 极小值的存在性定理

在给出变分问题(3)的非线性偏微分方程(8)后, 我们来验证在一般框架下极小化泛函(3)仍使初始能量减少. 假设需要求解的最优化问题(3)简化为

$$\left\{ \inf_{v \in L^1(\Omega), \int_{\Omega} v(x) dx = 0} \int_{\Omega} E(v(x)) dx \right\} \quad (9)$$

利用梯度下降法, 变分泛函(9)可以表示为:  $v_t = -E_v$ . 根据前面的推导, 用  $v_t = \Delta E_v$  来代替这个等式. 不难发现: 初始能量在这个新扩散流下是呈下降趋势的.

事实上, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} E(v) dx \right) &= \int_{\Omega} E_v v_t dx = \int_{\Omega} E_v \Delta E_v dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla E_v \cdot \nabla E_v + E_v \Delta E_v) dx - \int_{\Omega} |\nabla E_v|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(E_v \nabla E_v) dx - \int_{\Omega} |\nabla E_v|^2 dx \\ &= \int_{\partial\Omega} E_v \frac{\partial}{\partial n}(E_v) d\Omega - \int_{\Omega} |\nabla E_v|^2 dx \end{aligned} \quad (10)$$

因为  $E_v$  满足条件:

- (i) 在边界  $\partial\Omega$  上  $E_v = 0$  或  $\frac{\partial}{\partial n}(E_v) = 0$ ;
- (ii) 如果  $E_v \neq 0$ , 那么  $\nabla E_v \neq 0$ .

因此, 式(10)就是下降方向, 即  $\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} E(v) dx \right) < 0$ .

接下来, 我们给出变分问题(3)极小值存在的定理证明  
定理 假设

$$f \in BV(\Omega) + \left\{ v \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} v(x) dx = 0 \right\}$$

那么极小化问题(3)在  $L^2(\Omega)$  中存在极小值.

证明 假设  $(f - v_n)$  是式(3)的极小化序列. 那么, 存在常数  $M > 0$ , 使得对所有的  $n \geq 0$  都有  $\int_{\Omega} |\nabla(f - v_n)| \leq M$ . 由 Poincare 不等式知, 存在仅依赖于  $\Omega$  的常数  $V > 0$ , 使得

$$\left\| (f - v_n) - \frac{\int_{\Omega} (f - v_n)}{|\Omega|} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \int_{\Omega} |\nabla(f - v)|.$$

因为对所有的  $n \geq 0$ , 有  $\int_{\Omega} (f - v_n) = \int_{\Omega} f$ . 因此, 我们推得  $(f - v_n)$  在  $L^2(\Omega)$  和  $L^1(\Omega)$  中一致有界. 所以,  $(f - v_n)$  在 BV 空间中也一致有界: 即存在一常数  $C'$ , 使得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(f - v_n)| dx &= \|f - v_n\|_{L^1(\Omega)} \\ &+ \int_{\Omega} |\nabla f(f - v)| \leq C' \end{aligned}$$

这时, 存在  $(f - v) \in BV(\Omega)$  和  $(f - v_n)$  的子序列(仍记为  $(f - v_n)$ ), 使得当  $n \rightarrow \infty$  时,  $(f - v_n)$  在  $L^1(\Omega)$  空间中强收敛于  $(f - v)$ , 同时使得该子序列在 BV 空间中弱收敛于  $(f - v)$ . 因此, 我们有

$$\int_{\Omega} |\nabla(f - v)| \leq \liminf_n \int_{\Omega} |\nabla(f - v_n)| \quad (11)$$

另一方面, 对于每个收敛的极小化子序列  $(f - v_n)$ , 存在唯一的  $p_n \in H^1(\Omega)$  单值函数, 使得  $v_n = -\Delta p_n$ . 由定理 2.1<sup>[4,8]</sup> 知: 对所有的  $n \geq 0$ , 有  $\|\nabla p_n\|_{L^2(\Omega)} \leq M$ . 同

时,  $\int_{\Omega} p_n dx = 0$ . 利用 Poincare 不等式, 推知对所有的  $n \geq 0$ , 都有

$$\left\| p_n - \frac{\int_{\Omega} p_n}{|\Omega|} \right\|_{L^2(\Omega)} = \|p_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla p_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C''$$

因此, 存在  $P \in H^1(\Omega)$  和  $p_n$  的子序列(记为  $P_n$ ), 使得

$P_n$  在  $L^2(\Omega)$  中强收敛于  $P$ , 同时,  $\int_{\Omega} P dx = 0$  由极限的唯一性知:  $v = -\Delta P$ . 所以, 我们得出

$$\begin{aligned} \|\nabla P\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\nabla \Delta^{-1} v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \liminf_n \|\nabla P_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|\nabla \Delta^{-1} v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

最后, 由式(11) 和(12) 知:

$$E(v) \leq \liminf_n E(v_n)$$

因此,  $v$  是变分问题(3) 的极小值, 定理证毕.

### 4 算法

这部分给出求解扩散流(8) 的算法.

假设  $f$  表示原始图像, 那么,  $f$  的小波变换为

$$f = \sum_{k \in Z} \langle f | \phi_{j_0, k} \rangle \phi_{j_0, k} + \sum_{k \in Z, j \geq j_0} \langle f | \phi_{j, k} \rangle \phi_{j, k}$$

其中,  $\phi$  和  $\psi$  分别表示尺度函数和小波函数. 令

$$WLC = \int_{\Omega} \Delta \left[ \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla f(-v)}{|\nabla(f-v)|} \right] \right] \phi_{j, k}(x) dx \quad (13)$$

式(13) 表示  $\Phi = \Delta \left[ \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla f(-v)}{|\nabla(f-v)|} \right] \right]$  在小波基  $\phi$  上的投影. 为了计算式(13), 首先考虑对所有的  $(i, j)$ , 散度算子  $\operatorname{div}(\cdot)$  的离散格式为

$$\left[ \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla(f-v)}{|\nabla(f-v)|} \right] \right]_{i, j} = D_1^- \left\{ \frac{D_1^+(f_{i, j} - v_{i, j})}{A} \right\} + D_2^- \left\{ \frac{D_2^+(f_{i, j} - v_{i, j})}{A} \right\} \quad (14)$$

其中,

$$A = \sqrt{|D_1^+(f_{i, j} - v_{i, j})|^2 + |D_2^+(f_{i, j} - v_{i, j})|^2} + \epsilon$$

$$D_1^+ u_{i, j} = u_{i+1, j} - u_{i, j}, D_2^+ u_{i, j} = u_{i, j+1} - u_{i, j},$$

$$D_1^- u_{i, j} = u_{i, j} - u_{i-1, j}, D_2^- u_{i, j} = u_{i, j} - u_{i, j-1}.$$

令  $D = \operatorname{div}(\cdot)$ , 那么, 拉普拉斯算子  $\Delta(\cdot)$  的离散格式为

$$\Delta D = -4D_{i, j} + D_{i-1, j} + D_{i+1, j} + D_{i, j-1} + D_{i, j+1} \quad (15)$$

这时, 式(13) 就可以表示为

$$WLC = \text{FWT}(\Delta D) \quad (16)$$

其中, FWT 为小波正变换.

综上所述, 求解扩散流(8) 的算法可以概括为:

(1) 初始化:  $v_0 = \sum_{k \in Z, j \geq j_0} \langle f | \phi_{j, k} \rangle \phi_{j, k}$ .

(2) 迭代:

- 令  $u_n = f - v_n$
- 利用式(14) ~ (16) 计算  $WLC(u_n)$ .
- 对所有的  $(j, k)$ , 有

$$\beta_{j, k}^{n+1} = \beta_{j, k}^n + dt \left[ \frac{1}{2\lambda} WLC(u_n) - \beta_{j, k}^n \right].$$

- $v_n = \text{IWT}(\beta_{j, k}^{n+1})$ , 其中, IWT 表示小波逆变换.
- 将小波系数  $\beta_{j, k}^{n+1}$  上传.

(3) 停止标准:  $|v_{n+1} - v_n| \leq \epsilon$

### 5 数值实验

在这一节中, 我们首先用新方法、OSV 模型和 VO 模型对给定的 Barbara 截取图像做纹理分解实验. 新方法中, 相应的参数  $\lambda$  和时间步长  $dt$  分别取为 0.01 和 0.001. 图1 表示三种方法分解后结构  $u$  和  $v$  纹理的对

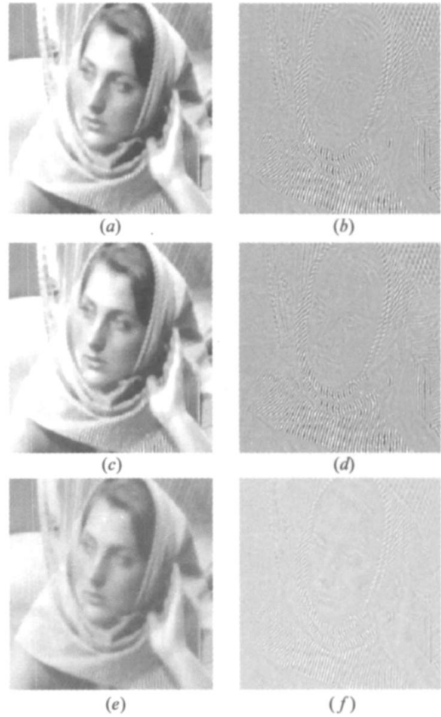


图1 (a) 和 (b) 为新方法对 Barbara 分解后  $u+v$  的结果; (c) 和 (d) 为 OSV 模型对 Barbara 分解后  $u+v$  的结果; (e) 和 (f) 为 VO 模型对 Barbara 分解后  $u+v$  的结果

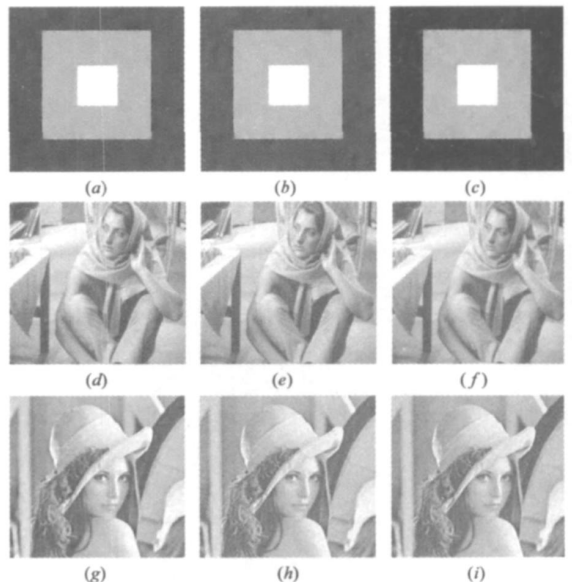


图2 (a), (d) 和 (g) 为新方法去噪后的结果; (b), (e) 和 (h) 为 OSV 模型去噪后的结果; (c), (f) 和 (i) 为 ROF 模型去噪后的结果

比结果. 由此不难发现, 新方法和 OSV 模型一样可以较好地图像中不同的特征信息区分; 而 VO 模型会损失较多的结构特征  $u$  (如眼睛, 嘴巴, 手等) 在纹理成分  $v$ .

其次, 我们用新方法、OSV 模型和 ROF 模型对三幅图像(分别为合成图像, Barbara 和 Lena) 做去噪验证. 事实上, 这可以看作是 高斯白噪声  $v$  从带噪图像中的分解. 图 2 给出三种方法去噪后的结果  $u$ . 表 1 给出三种方法去噪后峰值信噪比 (PSNR) 的比较. 这些实验结果说明新方法可以有效抑制噪声.

表 1 基于新方法、OSV 模型和 ROF 模型去噪后的 PSNR 比较

图像及小波	$\sigma$	PSNR	ROF 模型	新方法	OSV 模型
合成图 (db4)	20	22.016	34.278	35.906	35.578
Barbara (db4)	10	28.106	30.706	30.928	30.824
Lena (db8)	15	24.584	29.488	30.347	30.226

## 6 结论

本文从不同的角度考虑 OSV 模型, 提出一个新的基于全变差极小化和  $H^{-1}$  范数的图像分解变分模型. 同时, 本文给出了新模型在小波空间中的具体求解算法和极小值的存在性证明. 实验表明新方法的可行性.

### 参考文献:

- [1] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D*, 1992, 60(1-4): 259-268.
- [2] Meyer, Y. *Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations*[R]. Boston, USA: American Mathematical Society, 2001.

- [3] L A Vese, S J Osher. Modeling texture with total variation minimization and oscillating patterns in image processing[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2003, 19(1/3): 553-572.
- [4] S Osher, A Sole, L Vese. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the norm[J]. *Multiscale Model. Simul.* 2003, 1(3): 349-370.
- [5] E Giusti. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation* [M]. Boston Basel Stuttgart: Birkhauser, 1984.
- [6] 冯象初等编. *数值泛函与小波理论* [M]. 西安, 西安电子科技大学出版社, 2003.
- [7] T Reginska, L Elden. Solving the sideways heat equation by a wavelet Galerkin method[J]. *Inverse Problems*, 1997, 13(5): 1093-1106.
- [8] R Dautray, J L Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology* [M]. Berlin: Springer Verlag, 1988.

### 作者简介:



李 敏 女, 1979 年出生于山西兴县, 现为西安电子科技大学应用数学专业博士研究生. 主要研究方向是偏微分方程理论、小波理论及其在图像处理中的应用.

E-mail: Limin791202@163.com

冯象初 男, 1962 年出生于陕西西安, 教授, 博士生导师. 主要研究领域为现代数值分析方法、小波理论及其应用和图像处理的偏微分方程.